ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки
Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678
УДК 517.925

ПРИЗНАКИ РЕГУЛЯРНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

© А. И. Перов, И. Д. Коструб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

Аннотация. На основе прежних работ авторов указаны новые признаки регулярности и устойчивости векторно-матричных дифференциальных уравнений с переменной главной частью.
Ключевые слова: линейные векторно-операторные дифференциальные уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами; ограниченные; почти периодические; асимптотически устойчивые решения; ограниченная функция Грина; интегральные и частотные постоянные

Введение

В книгах [1] и [2] изучались дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с неограниченными и, соответственно, ограниченными коэффициентами. В указанных книгах дифференциальные уравнения высшего порядка встречаются эпизодически; в книге [2] это, в основном, линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Одной из важных задач при изучении дифференциальных уравнений является вопрос об устойчивости решений. Если для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами этот вопрос изучен достаточно глубоко, уравнения в переменными коэффициентами представляют иногда трудно разрешимую задачу. Для уравнений с переменными коэффициентами В.М. Алексеевым [3] был предложен метод замороженных коэффициентов, подробно изученный для систем дифференциальных уравнений первого порядка в [4]. Авторы обнаружили много общего между их прежними исследованиями ограниченных решений дифференциальных уравнений высшего порядка [5] и методом замороженных коэффициентов. Полученные на этом пути простейшие результаты и составляют содержание этой статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и $\text{End}\ \mathbb{B}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $\mathbb{B}$. В банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассмотрим линейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0(t)\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_n(t)\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ искомая векторная функция, а операторные функции $\mathbf{A}_j(t) : \mathbb{R} \to \text{End}\ \mathbb{B}$ (сильно) измеримые и ограниченные, более того, они имеют ограниченные колебания

$$||\mathbf{A}_j(t) - \mathbf{A}_j(s)|| \leq l_{n-j}, \ \ (t, s \in \mathbb{R}), \ \ 0 \leq j \leq n, \tag{2}$$

где $l_0, l_1, ..., l_n$ – некоторые неотрицательные числа. Предполагается также, что оператор $\mathbf{A}_0(t)$ при каждом t обратим: $\mathbf{A}_0^{-1}(t) \in \text{End}\ \mathbb{B}$.

О п р е д е л е н и е 1. При каждом фиксированном t операторный характеристический многочлен

$$\mathbf{L}_n(t, \lambda) \equiv \mathbf{A}_0(t)\lambda^{(n)} + \mathbf{A}_1(t)\lambda^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_n(t) : \mathbb{C} \to \text{End}\ \mathbb{B} \tag{3}$$

называется *нерезонансным,* если выполнено условие

$$\mathbf{L}_n^{-1}(t, i\theta) \in \text{End}\ \mathbb{B}, \ \ -\infty < \theta < +\infty. \tag{4}$$

Введем частотные и интегральные постоянные.

О п р е д е л е н и е 2. *Частотные* постоянные определяются следующим образом

$$\sigma_j(t) = \max_{-\infty<\theta<+\infty} ||(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(t, i\theta)||, \ \ 0 \leq j \leq n \tag{5}$$

(в случае $j = n$ максимум нужно заменить на супремум).

Для удобства введем обозначение

$$\sigma_j = \sup_{-\infty<t<+\infty} \sigma_j(t), \ \ 0 \leq j \leq n. \tag{6}$$

В силу нерезонансного условия (3) уравнение (1) при каждом фиксированном t имеет операторную ограниченную функцию Грина, то есть функцию Грина задачи об ограниченных решениях $\mathbf{G}(t, s)$.

О п р е д е л е н и е 3. Определим интегральные постоянные

$$æ_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ||\mathbf{G}^{(j)}(t, s)||ds, \ \ 0 \leq j \leq n \tag{7}$$

(в случае $j = n$ нужно добавить к правой части $||\mathbf{A}_0^{-1}(t)||$).

Для удобства введем обозначение

$$æ_j = \sup_{-\infty<t<+\infty} æ_j(t), \ \ 0 \le j \le n. \tag{8}$$

Мы будем говорить, что выполнено частотное условие, если

$$q_\sigma = \sum_{j=0}^{n} l_j \sigma_j < 1 \tag{9}$$

и интегральное условие, если

$$q_æ = \sum_{j=0}^{n} l_j æ_j < 1, \tag{10}$$

где l_j взяты из (2).

Фиксируем некоторое t_0 и перепишем уравнение (1) в новом виде, оставив слева часть уравнения с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0(t_0)\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1(t_0)\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_n(t_0)\mathbf{x} = \mathbf{B}_0(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(t)\dot{\mathbf{x}} + ... + \mathbf{B}_n(t)\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{f}(t), \tag{11}$$

где $\mathbf{B}_j(t) = \mathbf{A}_{n-j}(t_0) - \mathbf{A}_{n-j}(t), \ \ 0 \le j \le n.$ Тогда в силу условия (2) имеем

$$||\mathbf{B}_j(t)|| \le l_j, \ \ 0 \le j \le n. \tag{12}$$

2. Основные результаты

Применение основных результатов работы [5] приводит к следующим теоремам.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и выполнено интегральное условие (10).*

Тогда при любой ограниченной измеримой векторной функции $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение вместе с производными до n-го порядка включительно, причем справедливы оценки

$$||\mathbf{x}^{(j)}|| \le \frac{æ_j}{1-q_æ}||\mathbf{f}||, \ \ 0 \le j \le n. \tag{13}$$

Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство и выполнено частотное условие (9).

Тогда имеет место высказанное выше утверждение, а оценки приобретают вид

$$||\mathbf{x}^{(j)}|| \le \frac{\sigma_j}{1-q_\sigma}||\mathbf{f}||, \ \ 0 \le j \le n. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть операторные функции и свободный член в уравнении (1) являются почти периодическими функциями (операторные функции – в сильном смысле). Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство.*

Тогда в условиях теоремы 1 для любой векторной почти периодической функции $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение вместе с производными до n-го порядка включительно, причем справедливы оценки

$$[\![\, \mathbf{x}^{(j)} \,]\!] \le \frac{\sigma_j}{1-q_\sigma}[\![\, \mathbf{f} \,]\!], \ \ 0 \le j \le n, \tag{15}$$

причем, группа частот почти периодического решения содержится в группе частот уравнения (1).

В этой теореме была использована норма Безиковича почти периодической функции $|||\mathbf{f}||| = \sqrt{\sum\limits_k ||\mathbf{f}_k||^2}$, где $\mathbf{f}_k \sim \sum\limits_k \mathbf{f}_k e^{i\theta_k t}$ – ряд Фурье векторной почти периодической функции $\mathbf{f}(t)$.

И, вероятно, самый главный результат.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 1 операторный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(t,\lambda)$ при каждом фиксированном t является гурвицевым.*

Тогда существующее в условиях теоремы 1 ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем равномерно и экспоненциально в том смысле, что

$$||\mathbf{x}^{(j)}(t) - \mathbf{y}^{(j)}(t)|| \leq Ne^{-\varepsilon(t-s)} \sum_{k=0}^{n-1} ||\mathbf{x}^{(k)}(s) - \mathbf{y}^{(k)}(s)||, \;\; 0 \leq j \leq n-1 \tag{16}$$

при $t \geq s$, где N, ε – некоторые положительные постоянные; здесь $\mathbf{y}(t)$ – любое другое решение уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилле Э.,Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИИЛ, 1962. 832 с.

2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

3. *Алексеев В.М.* Оценка погрешности численного интегрирования // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 247-250.

4. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

5. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка // Сибирский математический журнал. Новосибирск, 2016. Т. 57. № 4. С. 830-849.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, e-mail: anperov@mail.ru

Коструб Ирина Дмитриевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, e-mail: ikostrub@yandex.ru

Для цитирования: *Перов А.И., Коструб И.Д.* Признаки регулярности и устойчивости дифференциальных уравнений высшего порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 674–678. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678

SIGNS OF REGULARITY AND STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

A. I. Perov, I. D. Kostrub

Voronezh State University
1, Universitetskaya sq., Voronezh 394006, Russian Federation
E-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

Abstract. On the basis of previous works of authors new signs of regularity and stability of vector-matrix differential equations with a variable main part are specified.

Keywords: higher order linear vector-operator differential equations with variable coefficients; bounded; almost periodic; asymptotically stable solutions; bounded green's function; integral and frequency constants

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R. *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 832 p. (In Russian).

2. Daletsky Yu.L., Krein M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 536 p. (In Russian).

3. Alekseyev V.M. Otsenka pogreshnosti chislennogo integrirovaniya [Error estimate of numerical integration]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1960, vol. 134, no. 2, pp. 247-250. (In Russian).

4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskiy V.V. *Teoriya pokazateley Lyapunova i eye prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [Lyapunov Exponent Theory and Its Applications to Stability Issues]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian).

5. Perov A.I., Kostrub I.D. On bounded solutions to weakly nonlinear vector-matrix differential equations of order *n*. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 650-665.

Received 16 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Perov Anatoly Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of System Analysis and Management, e-mail: anperov@mail.ru

Kostrub Irina Dmitrievna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of System Analysis and Management, e-mail: ikostrub@yandex.ru

For citation: Perov A.I., Kostrub I.D. Priznaki regulyarnosti i ustoychivosti differentsial'nyh uravneniy vysshego poryadka [Signs of regularity and stability of higher order differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 674–678. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00197).